Μάθημα 1ο 12/10/2017

Γραμμικός Διανυσματικός Χώρος: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

Διάνυσμα: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ανάστροφο διάνυσμα: $x^T = (x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n)$

Νόρμες Διανυσμάτων.

Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{C}^n$ ορίζεται ως $(x,y)_2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$

$(x,y) = \overline{(y,x)}$

- Δύο διανύσματα $x, y \in \mathbb{C}^n$ είναι $\boxed{\text{ορθογώνια}}$ ανν $(x,y) = 0$

- $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ αν $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Νόρμα : είναι μία απεικόνιση $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{+,0}$
(υπό προϋποθέσεις):
Αν ισχύουν οι ιδιότητες :

(i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$ και $\|x\| = 0$ ανν $x = 0$

(ii) $\|c \cdot x\| = |c| \cdot \|x\| \quad \forall c \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^n$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ τριγωνική ιδιότητα

(iv) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$

Απόδειξη για (iv)

$$\|x\| = \|y + (x-y)\| \leq \|y\| + \|x-y\| \Leftrightarrow$$
$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

Ομοίως: $\|y\| = \|x + (y-x)\| \leq \|y\| + \|y-x\| =$
$= \|y\| + \|x-y\|$

$\Leftrightarrow \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$

$\Rightarrow \quad \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$

Η Νόρμα ορίζει απόσταση μεταξύ 2 διανυσμάτων:
$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Απόδειξη για (i) :

$0 = \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$

Νόρμες:

① $\|*\|_1 : \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

② $\|*\|_2 : \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$ Ευκλείδεια Νόρμα

③ $(\|x\|_2)^2 = \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i = (x,x)_2$

④ $\|*\|_\infty = \max_i |x_i|$

⑤ $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$

> $\lim \|x\|_p = \max_i |x_i| = \|x\|_\infty$

Ανισότητα Cauchy - Schwartz

$$\boxed{|(x,y)_2| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2}$$

Η ανισότητα ισχύει για $x=0$ ή $y=0$ ως ισότητα.

Έστω $x,y \in \mathbb{C}^n$ με $x \neq 0$, $y \neq 0$. Θεωρούμε $\theta \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (\theta |x_i| + |y_i|)^2 =$$
$$= \theta^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\theta \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2$$

$\underline{D \leq 0}$: $\frac{D}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$|x_i| = |\bar{x}_i|$

$\Leftrightarrow |(x,y)|^2 = \left| \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i \right|^2 \leq \boxed{\sum (|\bar{x}_i y_i|)^2} \leq$

$\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$

$\Leftrightarrow |(x,y)| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$,

<u>Γωνία Διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{C}^n$</u>

$\cos\theta = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$. Αν $y = c \cdot x$, $c > 0$ τότε $\cos\theta = 1$.

$\cos\theta = \frac{(x, c\cdot)}{\|x\| \cdot \|c \cdot x\|} = \frac{c}{|c|} \cdot \frac{(x,x)}{\|x\|_2^2} \overset{c>0}{=} 1 \Rightarrow \theta = 0$

Αν $y = cx$ με $c < 0$ τότε : $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$

<u>Θεώρημα</u>: Μια ακολουθία διανυσμάτων $\{x^{(k)}\} \in \mathbb{C}^n$ συγκλίνει στο διάνυσμα x ανν :

$\lim_{k \to \infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$

Ορισμός: Δύο νόρμες $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_\beta$ λέγονται ισοδύναμες ή συγκρίσιμες αν $\exists\ c_1, c_2 > 0$ τ.ω.:

$$c_1 \|x\|_a \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_a \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_2} \|x\|_\beta \leq \|x\|_a \leq \frac{1}{c_1} \|x\|_\beta .$$

Άσκηση

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$$

$$\|x\|_2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\left(\sum |x_i|\right)^2\right)^{1/2} = \sum |x_i| = \|x\|_1$$

Άρα: $\boxed{1 \cdot \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2}$

για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$: $\|x\|_1 = \|x\|_2 = 1.$

για $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$: $\|y\|_1 = n$, $\|y\|_2 = \sqrt{n}$

$$\Downarrow$$

$$\|y\|_1 = \sqrt{n} \cdot \|y\|_2$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \max_j |x_j|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \max_j |x_j| \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \max_j |x_j| = \left(\max_j |x_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \, \|x\|_\infty$$

<u>Άρα:</u> $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2 \leq n \cdot \|x\|_\infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

<u>Θεώρημα:</u> Όλες οι νόρμες στον $\mathbb{C}^n$ είναι ισοδύναμες.

Όλες οι νόρμες σε σταθμητούς χώρους (δηλ. χώρους με νόρμα) πεπερασμένης διάστασης είναι ισοδύναμες.

<u>Απόδειξη για $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$</u>

$$\Leftrightarrow \|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y, x+y) \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

$$(x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) =$$

$$= \|x\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|_2^2$$

Άσκηση (4) του βιβλίου

ν.δ.ο. $\|x+y\|_2 = \|x\| + \|y\|$ ανν $\boxed{y = \lambda x}$, $\lambda > 0$

συνευθειακά

Άσκηση (6) του βιβλίου

Ν.δ.ο. η απεικόνιση που ορίζεται από την $f(x) = \sum_{i=1}^{n} i|x_i|$ είναι νόρμα ενώ

η $g(x) = \sum_{i=1}^{n} (i-1)|x_i|$ δεν είναι.

Λύση

• η g δεν είναι νόρμα διότι:

για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ έχουμε $g(x) = 0 \cdot 1 + \sum_{i=2}^{n} (i-1) \cdot 0 = 0$

ενώ $x \neq 0$

(κανονικά, για νόρμα $g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$)

• Για την f:

ιδιότητες νόρμας

(i) προφανής

(ii) $f(c \cdot x) = \sum_{i=1}^{n} i|c \cdot x_i| = |c| \cdot \sum_{i=1}^{n} i|x_i| = |c| \cdot f(x)$ ισχύει

(iii) $f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} i|x_i + y_i| \leq$

$\leq \sum_{i=1}^{n} i|x_i| + \sum_{i=1}^{n} i\|y_i\| = f(x) + f(y)$ ισχύει

Άρα: $(x+y, x+y) \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$

$\Leftrightarrow \; 2\mathrm{Re}(x,y) \leq 2\|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

Ισχύει διότι: $\mathrm{Re}(x,y) \leq |(x,y)| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

Άσκηση

Αν $x,y \neq 0$ $(x,y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα με $\|x\|_2 = \|y\|_2$ ν.δ.ο. τα διανύσματα $x+y$, $x-y$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Λύση

$$(x+y, x-y) = (x,x) - \cancel{(x,y)} + \cancel{(y,x)} - (y,y) =$$
$$= \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 = 0$$